方弱安定の場合には，(6.7)は，有限乱れの初期値に対する臨界値を与え，$|a_0(0)|$ が (6.7)の $|\overset{\infty}{a}_0|$ を越えると，a_n は時間と共に限りなく増大し，仮定と矛盾する。

流体力学方程式の一次元モデルとしてよく知られたBurgers 方程式については，固有函数 φ_n が三角函数となるから，取扱いは容易である。しかし流体力学方程式を直接扱う場合には，線型問題の特異性に起因する困難が常に障害となる。いずれにしても，数値解をも含めて，線型理論から量的に異る非線型解を得るべく努力が必要と思われる。

文　献

1) Noether, F. Z.A.M.M. 1(1921) 125-138.

2) Heisenberg, W. Ann. Phys. Lpz. 74(1924)577-627.

3) Meksyn, D. and Stuart, J. T. Proc. Roy. Soc. A 208(1951) 517-526.

4) Stuart, J. T. J. Fluid Mech. 4(1958) 1-21.

5) Taylor, G. I. Phil. Trans. Roy. Soc. A 223(1923) 289-343.

6. Stuart, J. T. J. Fluid Mech. 9(1960) 353-370.

7) Watson, J.J. Fluid Mech. 9(1960) 371-389.

8) Eckhaus, W. "Stadies in Non-Linear Stability Theory" (1965) springer.

非線型鎖の振動理論

戸 田 盛 和

線型の力で結ばれた振動子の集まりには規準振動があり，励起された規準振動は時間的に不変である。したがって線型の振動子系は熱的平衡状態への近接を

を示さない。そこで振動子系の平衡状態への近接は非線型項の存在によって保証されるものと考えられていた。しかしこれは少くとも一般的に正しくはない。これは一次元鎖の振動について Fermi 等 (1955) が計算機で調べて明かにされた。Ford と Waters や Jackson が最近この仕事を拡張し非線型摂動理論[2]と計算機によって，非線型の振動子系の行動で次第に明かにされて来ている。[1][2]

Ford と Waters (1963)は非線型振動子系に規準振動と呼べる運動が存在することを示した。[1] いま一次元の非線型鎖を伝わる進行波を表わす厳密解を示す。このモデルは線型と剛性球を両極端として含むものである。

非線型の相互作用としてここで考えるのは

$$\phi(r) \equiv A e^{-br} + ar + \text{const.} \quad (A, b, a > 0)$$

の形のポテンシャルである。[3] $\phi = \min.$ の位置を $r = D$ とすると $A = a e^{bD}/b$ である。

uniform な鎖を考え，$n-1$ 番目の粒子と n 番目の粒子の距離を r_n とすると運動方程式

$$m\ddot{r}_n = a\{2e^{-b(r_n-D)} - e^{-b(r_{n-1}-D)} - e^{-b(r_{n+1}-D)}\}$$

を得る。この式の進行波を表わす解として[3] wave train

$$e^{-b(r_n-D')} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{a'b/m}\left[\mathrm{dn}^2\left\{2K\left(\nu t - \frac{n}{\Lambda}\right)\right\} - \frac{E}{K}\right]$$

がある。D' はある定数で，運動が静止したときの粒子間の距離を与える。また

$$a' \equiv a e^{b(D-D')}$$

である。Λ は粒子数で測った波長，ν は振動数で分散関係

$$2K\nu = \sqrt{\frac{a'b}{m}}\left\{\frac{1}{\mathrm{sn}^2(2K/\Lambda)} - 1 + \frac{E}{K}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

で与えられる。KとEとは第1種および第2種の完全楕円積分をそれぞれ表わし，そのmodulus をkで表わす。

別の形の解として solitary wave

$$e^{-b(r_n-D')}-1=\sinh^2\alpha\cdot\mathrm{sech}^2\{\alpha(n-ct)\}$$

がある。これは wave train の極限 $k\to 1$ ，$\Lambda\to\infty$ としても与えられる。α は定数で波高を与え，cは波の速さで

$$c\equiv\sqrt{\frac{a'b}{m}}\ \frac{\sinh\alpha}{\alpha}$$

で与えられる。

線型の極限は modulus $k\to 0$ として得られる。a，bを一定にしておけば，これは微小振動の極限であるが，展開

$$\phi'(r)=ab(r-D)\{1-\frac{D}{2}(r-D)+\cdots\}$$

からわかるように，$b\to 0$ ，$a\to\infty$ ，$ab=\gamma=$一定の極限をとれば $K\to 0$ で有限振幅も与えられる。線型の極限では，

$$r_n-D'=-\frac{k^2}{2b}\sin^2\frac{\pi}{\Lambda}\cdot\cos 2\pi(\nu t-\frac{n}{\Lambda})\ ,$$

$$2\pi\nu=2\sqrt{a'b/m}\ \sin\frac{\pi}{\Lambda}$$

非線型項が小さく，波長が長い場合，$r_n(t)\to r(x,t)$，ただし $x=nd$ とおいて連続体近似 ($c_0=\sqrt{\frac{ab}{m}}D$)

$$r_{tt}=c_0^2\,[\,r_{xx}-b\{r_x^2+(r-D)r_{xx}\}+\frac{D^2}{12}r_{xxxx}\,]$$

を得る。soljtary wave の解は

$$r(x,t)-D' = \frac{\alpha^2}{b}\operatorname{sech}^2\frac{\alpha}{D}(x-c,t)$$

ただし

$$c_1 = D\sqrt{\frac{a'b}{m}}\left(1+\frac{\alpha^2}{6}\right)$$

である。このように一方向きに進行する波に対して変換

$$\xi=\epsilon\left(\frac{x}{c_0}-t\right),\quad \tau=\varepsilon^3 t \quad \text{ただし} \quad \varepsilon=-Db$$

とおくと $|\varepsilon|\ll 1$ のとき

$$n=\frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}\ \frac{r-D}{D}$$

に対して Korteweg-de Vries の方程式

$$n_\tau + n n_\xi = -\delta^2 n_{\xi\xi\xi} \quad (\delta^2 = D^2/24\,c_0^2)$$

が成り立つ。この式は最近，電子計算機によって吟味された。その結果 soliton (solitary wave の解) が独立に安定して運動することが示されたのであるが,[4] Kruskal-Zabusky のこの計算は非線型鎖の振動の合成・分解の方法を指唆するものとして重要である。

非線型の最も強い極限，すなわち線型と反対の極限は剛体球からなる体系である。相互作用のポテンシャルを

$$\phi(r) = B e^{-b(r-\sigma)} + ar + \text{const}$$

と書き直し

$$a = Bbe^{-b(D-\sigma)}$$

とおくと，$\phi(D)=\min.$ である。$D>\sigma$ とし，B を一定にしておいて $b\to\infty$ ($a\to 0$) の極限をとると，ϕ は直径 σ の剛体球のポテンシャルを表わすことになる。$a'=a(D'=D)$ とおいた分散関係において，波長 Λ，D および σ を一

定にとめて，ν＝有限になるように $b\to\infty$ の極限をとるためには $K\to\infty$（$k\to 1$）の極限を同時にとり，

$$b = \frac{4K}{\Lambda(D-\sigma)} \to \infty\,(k\to 1)$$

の極限をとらなければならない。このとき分散関係は

$$\nu\Lambda = \frac{1}{D-\sigma}\sqrt{\frac{B}{m}}$$

となる。したがってこの場合，定数Bは剛体球の運動エネルギーに比例している。

この極限移行によって得られる剛体球系の「規準運動」は例のようなものである。例えば波長 $\Lambda=3$ の波を考えると，ℓ を整数として，ある瞬間には 3ℓ 番目の粒子は右方へある速度 v で動き，$3\ell+1$，$3\ell+2$ 番目の粒子は $\frac{1}{2}$v の速度で左方へ移動している。剛体球は衝突の際に速度を交換するから，各球の位置（球の直径にあたる長さと差引いた位置）を横軸に，時間を縦軸にとると体系の規準運動は針金のななめのアミのような図によって与えられる。列車の時間表のダイヤに似ている。

剛体球からなる系の解でさらに $\Lambda\to\infty$（$\nu\to 0$，$\nu\Lambda$＝有限）の極限をとると，剛体球系の solitary wave あるいは soliton の表現が得られる。これを列車のダイヤのように表わすと，各粒子がすべてとまっていることを表わす等間隔の縦線と，これらをよぎるななめの一本の線によって与えられる。ななめの一本の線が1個の soliton である。このように soliton は独立な単位としてこのダイヤの上で「重ね合わせ」ができる。

以上のような考察から，非線型鎖は多くの点で線型鎖と似ていて，規準振動も存在すること，線型鎖と相違するところは，剛体球系の運動によってその特徴を把えることができるなどが明かにされた。模式的には

$$\text{wave}\ \underbrace{\overbrace{\text{train}\qquad\qquad\text{soliton}}^{\text{剛体球鎖}}}_{\text{非線型鎖}}$$

（非線型連続体）

のように表わすこともできる。

非線型鎖の理論として，なお多くの拡張が望まれる。その主なものは (1)ここで扱った解の安定性の吟味。 (2)定常波の解。 (3)外力に対する運動励起（応答）[5]。 (4)重ね合わせの原理に相当する非線型一般論。

これらの問題は将来に期待しなければならないが，計算機による吟味も有力な手段になるであろう。定常波の解に対しては計算機によってその安定性が確かめられていると考えられる。進行波に対してもこれが通用すると思われるが確証を得たいものである。

周期的境界条件，あるいは両端固定の定常波として，非線型鎖を量子力学的に扱えないかという問題もある。熱膨張などのように簡単に扱える問題もあるが，解の安定性と平衡状態への近接，エルゴートの問題など，統計力学的にも非線型鎖の模型は広く利用されるものと思う。

文　　献

1) J. Ford, J. Waters, J. Math. Phys. 4 1293(1963)

2) E. H. Lieb, D. C. Mathis "Mathematical Physics in One Dimension" Acad. Press.(1966)

2) J. Ford , J. Math, Phys. 2 387(1961)
E. A. Jackson, J. Math, Phys. 4 551, 686(1963)
J. Waters, J. Ford J. Math, Phys. 7 399(1966)

3) M. Toda, J. Phys. Soc. Japan 22 431(1967)

4) N. J. Zabusky, M. D. Kruskal Phys. Rev. Letters 15 240 (1965)

5) I. M. Bassett M. H. Pryce Phys. Rev. 150 640(1966)